ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2022. október 18.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

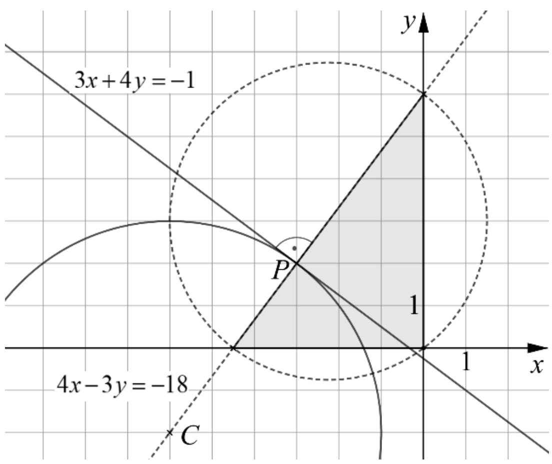
6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az *e* szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
A kör sugara $\left\|\overrightarrow{CP}\right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ egység,	1 pont	
egyenlete $(x+6)^2 + (y+2)^2 = 25$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

1. b)		
Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért az érintő egy normálvektora $\overrightarrow{CP}(3;4)$,	1 pont	
egyenlete $3x + 4y = -1$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

1. c)		
A CP egyenes egy irányvektora $\overrightarrow{CP}(3;4)$,	1 pont	
egyenlete $4x - 3y = -18$.	1 pont	
(Az $y = 0$, majd $x = 0$ helyettesítésekkel kapjuk, hogy) az egyenes az x tengelyt a $(-4{,}5;\ 0)$, az y tengelyt pedig a $(0;\ 6)$ pontban metszi.	1 pont	
A Pitagorasz-tétellel adódik, hogy a derékszögű háromszög átfogója $\sqrt{4{,}5^2 + 6^2} = 7{,}5$ egység hosszú.	1 pont	
A derékszögű háromszög körülírt körének sugara az átfogó fele,	1 pont	*A háromszög területe* 13,5,
tehát 3,75 egység hosszú.	1 pont	*körülírt körének sugara az* $R = \frac{abc}{4T}$ *képlettel:* $\frac{4{,}5 \cdot 6 \cdot 7{,}5}{4 \cdot 13{,}5} = 3{,}75$ *egység.*
Összesen:	**6 pont**	



2. a) első megoldás		
$\cos x = 0$ nem megoldás (ekkor nem lehet $\sin x = 0$),	1 pont	
ezért az egyenlet ekvivalens a $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3$, azaz a $\mathrm{tg}^2 x = 3$ egyenlettel.	1 pont	
$\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$ vagy $\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}$.	2 pont	
$\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$ esetén $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}$ esetén $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. a) második megoldás		
A $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ azonosság felhasználásával,	1 pont	
az egyenlet ekvivalens az $\frac{1}{4} = \cos^2 x$ egyenlettel.	1 pont	
$\cos x = \frac{1}{2}$ vagy $\cos x = -\frac{1}{2}$.	2 pont	
$\cos x = \frac{1}{2}$ esetén $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $\cos x = -\frac{1}{2}$ esetén $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.	2 pont	$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ vagy $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a megoldásokat fokban helyesen adja meg, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat.
2. Ha a vizsgázó válaszát periódus nélkül adja meg, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.
3. Ha a vizsgázó periódussal adja meg az egyenlet megoldásait, de a $k \in \mathbf{Z}$ feltételt egyszer sem említi, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat.

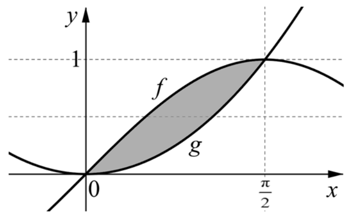
2. b)		
Az egyenlet értelmezési tartománya: $x > 2$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
(A logaritmus definíciója és azonosságai alapján) $\log_3 \frac{(x+8)(x-2)}{x+4} = \log_3 3$.	2 pont	
(A logaritmusfüggvény kölcsönös egyértelműsége miatt) $\frac{(x+8)(x-2)}{x+4} = 3$.	1 pont	
Nullára rendezve $x^2 + 3x - 28 = 0$.	1 pont	
Ennek a gyökei a 4 és a –7,	1 pont	
melyek közül csak a 4 megoldás (mert $-7 \le 2$).	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy az értelmezési tartományon ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

3. a)		
24 db töltő adatait tartalmazza a kördiagram, tehát az egy töltőnek megfelelő középponti szög 15°.	1 pont	
A 24 töltő élettartama táblázatban: élettartam (hónap): 49, 50, 51, 52, 53, 54 darabszám: 2, 4, 7, 4, 5, 2	1 pont	
A 24 töltő élettartamának átlaga: $\frac{2\cdot 49+4\cdot 50+7\cdot 51+4\cdot 52+5\cdot 53+2\cdot 54}{24}=$ $= 51,5$ (hónap).	1 pont	
Az élettartamok szórása: $\sqrt{\frac{2\cdot(49-51,5)^2+...+2\cdot(54-51,5)^2}{24}}=$ $=\sqrt{\frac{4\cdot 2,5^2+9\cdot 1,5^2+11\cdot 0,5^2}{24}}=$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel helyesen számol.*
$=\sqrt{2}$ ($\approx 1,41$) (hónap).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. b)		
Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott töltő élettartama 50 hónapnál kevesebb ($1 - 0,9 =$) 0,1.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(Jelölje $P(n)$ annak valószínűségét, hogy a 20 töltő között n db élettartama lesz 50 hónapnál kevesebb.) $P(0)=0,9^{20}$ ($\approx 0,122$)	1 pont	
$P(1)=\binom{20}{1}\cdot 0,1\cdot 0,9^{19}$ ($\approx 0,270$) $P(2)=\binom{20}{2}\cdot 0,1^2\cdot 0,9^{18}$ ($\approx 0,285$)	2 pont	
A kérdezett valószínűség tehát $P(0)+P(1)+P(2)\approx 0,677$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. c)		
Ha p jelöli annak a valószínűségét, hogy egy töltő élettartama legalább 55 hónap, akkor $(1-p)^5=0,75$.	1 pont	
Innen $1-p$ ($=\sqrt[5]{0,75}$) $\approx 0,944$,	1 pont	
a kérdezett valószínűség tehát $p\approx 0,056$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. a)		
$f(0)=\sin 0=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ $g(0)=\left(\frac{0}{\pi}\right)^2=0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^2=1$ (Tehát az állítás igaz.)	3 pont	*Egy hiba esetén 2 pont, két hiba esetén 1 pont jár.*
Összesen:	**3 pont**	

4. b)		
(Mivel az adott intervallumban $f(x)\ge g(x)$, ezért) a síkidom területe: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{4}{\pi^2}\cdot x^2\right)dx=$	1 pont	
$=\left[-\cos x-\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$	2 pont	
$=\left(-0-\frac{\pi}{6}\right)-(-1-0)=$	1 pont	
$=-\frac{\pi}{6}+1$ ($\approx 0{,}476$).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. c)		
$a_n=\frac{2}{n}+2\pi$	1 pont	$a_{n+1}-a_n=\frac{-2}{n(n+1)}$ *Ez mindig negatív, tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.*
A $\left\{\frac{2}{n}\right\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő, 2π pedig állandó, ezért az a_n sorozat is szigorúan monoton csökkenő.	1 pont	
A sorozat felülről korlátos, mert a csökkenő sorozat első tagja egy felső korlát; alulról is korlátos, mert a sorozat mindegyik tagja pozitív (ezért például a 0 egy alsó korlátja a sorozatnak).	1 pont*	*A sorozat legkisebb felső korlátja* $2+2\pi$, *legnagyobb alsó korlátja pedig* 2π.
A $\left\{\frac{2}{n}\right\}$ sorozat határértéke 0,	1 pont	
ezért a megadott sorozat határértéke ($0+2\pi=$) 2π.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó először belátja, hogy a megadott sorozat konvergens, majd hivatkozik arra, hogy ebből következik a sorozat korlátossága.*

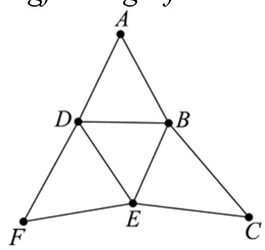
II.

5. a) **első megoldás**		
(Az A, B, D tartományok páronként szomszédosak, ezért) az A 4-féleképpen, a B 3-féleképpen, a D pedig 2-féleképpen színezhető.	1 pont	
Így az A, B, D tartományok lehetséges színezéseinek száma $4 \cdot 3 \cdot 2$ (= 24).	1 pont	
Feltehetjük, hogy pl. A piros, B kék, D zöld. Ekkor C nem lehet sem piros, sem kék (tehát sárga vagy zöld lehet).	1 pont	*Az E nem lehet sem kék, sem zöld (tehát piros vagy sárga lehet).*
Ha C sárga, akkor E csak piros lehet, és F színe 2-féle lehet (kék vagy sárga). Ekkor tehát E és F összesen 2-féleképpen színezhető.	1 pont	*Ha E sárga, akkor C zöld, és F 2-féle színű lehet (piros vagy kék).*
Ha C zöld, akkor E színe 2-féle lehet (piros vagy sárga), és mindkét esetben F is 2-féleképpen színezhető (ha E piros, akkor F kék vagy sárga, ha E sárga, akkor F piros vagy kék). Az E és az F megfelelő színezéseinek száma ekkor $2 \cdot 2$.	1 pont	*Ha E piros, akkor C színe 2-féle lehet (zöld vagy sárga), és F is 2-féle színű lehet (kék vagy sárga).*
Összesen tehát $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (2 + 2 \cdot 2) =$	1 pont	
= 144 megfelelő színezés van.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

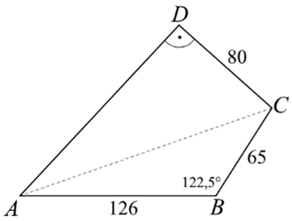
5. a) **második megoldás**		
(Az A, B, D tartományok páronként szomszédosak, ezért) az A 4-féleképpen, a B 3-féleképpen, a D pedig 2-féleképpen színezhető.	1 pont	
Így az A, B, D tartományok lehetséges színezéseinek a száma $4 \cdot 3 \cdot 2$ (= 24).	1 pont	
Feltehetjük, hogy A piros, B kék, D zöld. Ekkor az E csak 2-féleképpen színezhető (piros vagy sárga). Az E színének megválasztása után az F is csak 2-féleképpen színezhető (mert szomszédos D-vel és E-vel).	1 pont	
Ha a C lehetne piros is, akkor (az A, B, D, E, F színének megválasztása után) C-t is 2-féleképpen lehetne színezni (mert szomszédos B-vel és E-vel), vagyis összesen $2 \cdot 2 \cdot 2$ (= 8)-féle folytatása lenne az A piros, B kék, D zöld színezésnek.	1 pont	
Ha A piros, B kék, D zöld, akkor rossz színezések azok, amelyekben a C színe piros. Ekkor az E csak sárga lehet, F színe pedig 2-féleképpen választható (piros vagy kék), így összesen 2 rossz színezés van.	1 pont	

Ha az összes eset számából $(4\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)$ levonjuk a rossz esetek számát $(4\cdot3\cdot2\cdot2)$, akkor a megfelelő színezések számát kapjuk meg.	1 pont	
A megfelelő színezések száma $4\cdot3\cdot2\cdot(8-2)=144$.	1 pont	$192-48=144$
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a tartományokat egy gráf csúcsainak tekintjük, és a „szomszédosságot” a gráfban a két megfelelő csúcsot összekötő éllel jelenítjük meg, akkor a feladat átfogalmazható úgy, hogy gráf csúcsait kell helyesen színezni (helyes színezés esetén az éllel összekötött csúcsok színe különböző). A szövegnek megfelelő gráf:



5. b)		
(B, E, F számokat kifejezzük C segítségével.) (1) és (2) szerint $B=\frac{6+C}{2}$.	1 pont	*(1) és (2) szerint ha* $B=6+m$, *akkor* $C=6+2m$,
(5) szerint $E=C+2$, (3) és (1) szerint pedig $F=\sqrt{DE}=\sqrt{8(C+2)}$.	1 pont	*továbbá (5) miatt* $E=8+2m$, *és (4) miatt* $F=7+m$.
Végül (4) szerint $F=B+1$, azaz $\sqrt{8(C+2)}=\frac{6+C}{2}+1$.	1 pont	*(1) és (3) miatt* $F=\sqrt{8(8+2m)}$, *így* $\sqrt{8(8+2m)}=7+m$
A jobb oldalon közös nevezőre hozva, majd négyzetre emelve: $8(C+2)=\frac{64+16C+C^2}{4}$.	1 pont	$8(8+2m)=(7+m)^2$ $64+16m=49+14m+m^2$
4-gyel való szorzás után nullára rendezve: $0=C^2-16C$.	1 pont	$m^2-2m-15=0$
Az egyenlet gyökei $C=0$ és $C=16$.	1 pont	$m=-3$ *vagy* $m=5$
Az első esetben az ismeretlen számok: $B=3$, $C=0$, $E=2$, $F=4$.	1 pont	
A második esetben az ismeretlen számok: $B=11$, $C=16$, $E=18$, $F=12$.	1 pont	
Ellenőrzés a szövegbe helyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

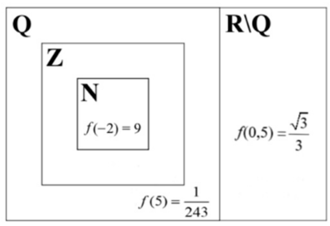
6. a)		
 Az *ABC* háromszög területe $\frac{126\cdot 65\cdot \sin 122{,}5°}{2}\approx$ ≈ 3454 (m^2).	1 pont	
Az *AC* átló hossza az *ABC* háromszögből koszinusz-tétellel: $AC=\sqrt{126^2+65^2-2\cdot 126\cdot 65\cdot \cos 122{,}5°}\approx 170$ (m).	1 pont	
Az *ADC* derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $AD=\sqrt{170^2-80^2}=150$ (m).	1 pont	
Az *ADC* háromszög területe $\frac{AD\cdot DC}{2}=\frac{150\cdot 80}{2}=6000$ (m^2).	1 pont	
A legelő területe (3454 + 6000 =) 9454 m^2 = 0,9454 ha.	1 pont	
$0{,}9454:0{,}9\approx 1{,}05$, tehát a legelő valódi területe kb. 5%-kal nagyobb a meghirdetettnél.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. b)		
A megdöntött vályúban maradt víztömeg alakja olyan szabályos háromszög alapú gúla, amelynek alapéle 38 cm, magassága 72 cm hosszú.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A szabályos háromszög területe $t=\frac{38^2\cdot\sqrt{3}}{4}$ (≈ 625,3) (cm^2).	1 pont	
A vályúban maradó víz térfogata $\frac{t\cdot 72}{3}$, azaz kb. 15 006 cm^3,	1 pont	
ami a kért kerekítéssel valóban 15 liter.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: A vályú térfogata kb. 45 000 cm^3 *(2 pont), a gúla térfogata ennek a harmada (1 pont), vagyis* 15 000 cm^3 *(1 pont), ami valóban* 15 *liter (1 pont).*

6. c) első megoldás		
A 15 liter egy olyan szabályos háromszög alapú hasáb térfogata, melynek magassága 72 cm,	1 pont	
így az alaplapjának területe $\frac{15\,000}{72} \approx 208{,}3$ (cm^2).	1 pont	
Az alaplap szabályos háromszög, oldala legyen x cm. $\frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 208{,}3$	1 pont	
Ebből $x \approx 21{,}9$ (cm),	1 pont	
ezért a kérdezett magasság $x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 19$ cm.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

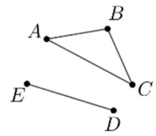
6. c) második megoldás		
Azonos alapú, azonos magasságú gúla és hasáb térfogatának aránya $1:3$, ezért a vályúban maradt víz térfogata a vályú térfogatának a harmada,	1 pont	
így a vízzel kitöltött (azonos magasságú) hasáb alapterülete is harmada az eredetinek.	1 pont	
A két hasáb alaplapja hasonló,	1 pont	
a hasonlóság aránya $\frac{1}{\sqrt{3}}$.	1 pont	
A vályúban maradt víz szintjének magassága tehát $\left(38 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 19$ cm.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. a)		
$f(-2) = 3^{-(-2)} = 9 \in \mathbf{N}$	1 pont	
$f(0,5) = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$	1 pont	
$f(5) = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243} \in (\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z})$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó a megoldását nem indokolja (a kiszámított függvényértékeket nem tünteti fel), akkor legfeljebb 2 pontot kaphat.

2. Ha a vizsgázó megoldásában az $x \mapsto 3^x$ függvénnyel dolgozik, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat.

7. b)		
(A számokat a hozzájuk tartozó pontok betűjelével jelöljük.) Az *A*, *B* és *C* számok racionálisak $\left(\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^7}, \frac{1}{3^{12}}\right)$. Két racionális szám összege is racionális, ezért az *ABC* részgráf három éle be van húzva.	1 pont	
A *D* és *E* számok irracionálisak. (Két irracionális szám összege lehet racionális és irracionális is.) $E=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1$ $D+E=1-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1=2$, tehát a *DE* él is be van húzva.	2 pont	$D+E=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}=$ $=\frac{(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)+1}{\sqrt{2}-1}=$ $=\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=2$
Egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális, ezért több él nincs.	1 pont	
A gráfnak tehát összesen 4 éle van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Indoklás nélkül megadott helyes gráf és válasz esetén 2 pontot kapjon a vizsgázó.

7. c)		
A téglalapok számát az $\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{n+1}}>10^{-6}$ egyenlőtlenség megoldásával kapjuk meg.	1 pont	
Az egyenlőtlenséget (a pozitív) 3^{n+1}-nel szorozva: $3-1>10^{-6}\cdot 3^{n+1}$, amiből $2\cdot 10^6>3^{n+1}$.	1 pont	
Az $x\mapsto 3^x$ ($x\in\mathbf{R}$) függvény szigorúan monoton növekedő,	1 pont	
így $\log_3(2\cdot 10^6)\approx 13{,}2>n+1$,	1 pont	
tehát $n=12$ a legnagyobb pozitív egész megoldás.	1 pont	
A 12 téglalap mindegyikének egyik oldala 1. Másik oldaluk hossza, és így a területük is egy olyan mértani sorozat első 12 tagja, amelyben $a_1=q=\frac{1}{3}$.	1 pont	
$S_{12}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{12}-1}{\frac{1}{3}-1}\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}5$ a téglalapok területének összege.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. a)		
A harmadik él hossza $\left(\frac{72}{4\cdot 2}=\right)$ 9 (dm),	1 pont	
a téglatest felszíne $(2\cdot(4\cdot 2+4\cdot 9+2\cdot 9)=)$ 124 dm^2.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

8. b)		
A téglatest élei (dm-ben mérve) a, $2a$ és b (a, $b > 0$).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A szöveg alapján a térfogat: $72=2a^2b$, ahonnan $b=\frac{36}{a^2}$.	1 pont	
A téglatest felszíne (dm^2-ben mérve): $4a^2+6ab=4a^2+\frac{216}{a}$.	1 pont	
Az $A:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R};\ A(a)=4a^2+\frac{216}{a}$ függvény deriválható, $A'(a)=8a-\frac{216}{a^2}$.	2 pont*	
Minimuma ott lehet, ahol $A'(a)=0$. Ekkor $a=3$.	1 pont*	
Mivel a második derivált az értelmezési tartomány minden elemére pozitív, ez valóban minimumhely.	1 pont*	$A''(a)=8+\frac{432}{a^3}>0$
A minimális felszínű téglatest élei 3 dm, 6 dm, illetve $(36:9=)$ 4 dm hosszúak.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

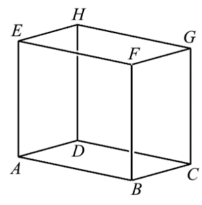
*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

$A(a)=4a^2+\frac{216}{a}=4a^2+\frac{108}{a}+\frac{108}{a}$	1 pont	
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva: $4a^2+\frac{108}{a}+\frac{108}{a}\geq 3\cdot\sqrt[3]{4a^2\cdot\frac{108}{a}\cdot\frac{108}{a}}=$ $=3\cdot\sqrt[3]{46\,656}=3\cdot 36=108$.	1 pont	
Egyenlőség (vagyis minimális felszín) akkor és csak akkor lehetséges, ha $4a^2=\frac{108}{a}$,	1 pont	
amiből $a=3$ (dm).	1 pont	

8. c) **első megoldás**		
Két élszomszédos csúcs nem lehet a három kiválasztott pont között, mert ezekhez akárhogy választunk harmadik csúcsot, az így meghatározott sík (lapsík vagy átlós sík) átmegy egy negyedik csúcson is.	2 pont	
A téglatestnek vagy az alap-, vagy a fedőlapjáról két csúcsot is ki kell választanunk, ezek tehát csak átlós csúcsok lehetnek. Ezt az alap- és a fedőlap esetében is 2-féleképpen tehetjük meg.	2 pont	
Ezekhez a másik lapról úgy kell harmadik csúcsot választanunk, hogy egyikkel se legyen élszomszédos, ezt minden esetben 2-féleképpen tehetjük meg.	1 pont	
A megfelelő kiválasztások száma tehát $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. c) **második megoldás**		
(A komplementer leszámlálás módszerét használjuk.) A 8 csúcs közül $\binom{8}{3} = 56$-féleképpen választhatunk ki 3 csúcsot.	1 pont	
Ha egy oldallap 3 csúcsát választjuk, az nem megfelelő választás, mert a negyedik csúcs is rajta van az oldallap síkján.	1 pont	
Egy oldallapon 4-féleképpen választhatunk 3 csúcsot, ezért ez a $6 \cdot 4 = 24$ választás nem felel meg.	2 pont	
Ugyanezzel a megfontolással látható be, hogy nem megfelelő az sem, ha a téglatest 6 átlós síkján lévő 4-4 csúcs közül választunk 3-at. Tehát itt is 24 nem megfelelő választás van.	1 pont	
A maradék $56 - 24 - 24 = 8$ választás (a téglatest 8 csúcsából induló 3-3 él végpontja) megfelelő.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül felsorolja a megfelelő kiválasztásokat (ACF, ACH, BDE, BDG, EGB, EGD, FHA, FHC – az ACFH és a BDEG tetraéder 4-4 lapsíkja), és ez alapján helyesen válaszol, akkor 4 pontot kapjon.

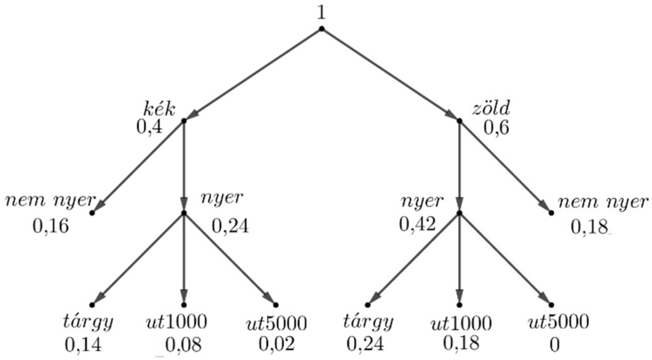


9. a)		
(Ha a kék sorsjegy ára k Ft, a zöld sorsjegyé z Ft, akkor) $5k + 3z = 6700$ és $3k + 2z = 4200$.	1 pont	
Az első egyenlet kétszereséből a második egyenlet háromszorosát kivonva megkapjuk, hogy $k = 800$, egy kék sorsjegy ára tehát 800 Ft.	2 pont	
Amiből $z = 900$, egy zöld sorsjegy ára tehát 900 Ft.	1 pont	
Ellenőrzés: 5 kék és 3 zöld sorsjegy $4000 + 2700 = 6700$ Ft-ba, 3 kék és 2 zöld pedig $2400 + 1800 = 4200$ Ft-ba kerül.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a válaszait mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

9. b)		
Ha n db sorsjegy készült, akkor $0,4n$ db sorsjegy kék, és ezek 35%-a nyer tárgynyereményt. Annak valószínűsége, hogy a kihúzott sorsjegy kék, és tárgynyereményt nyer: $P(AB) = \frac{0,4n \cdot 0,35}{n} = 0,14$.	1 pont	$P(AB) = 0,4 \cdot 0,35 =$ $= 0,14$
Az n db sorsjegy között $0,6n$ db zöld, és ezek 40%-a nyer tárgynyereményt. Annak valószínűsége, hogy a kihúzott sorsjegy zöld, és tárgynyereményt nyer: $\frac{0,6n \cdot 0,4}{n} = 0,24$.	1 pont	*(A zöld sorsjegy húzása a $\overline{B}$ esemény.)* $P(A\overline{B}) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$
A tárgynyereményt nyerő sorsjegy vagy kék, vagy zöld (és ez két egymást kizáró esemény), ezért $P(A) = 0,14 + 0,24 = 0,38$ valóban.	1 pont	$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) =$ $= 0,14 + 0,24 = 0,38$
$P(B\mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,14}{0,38} =$	1 pont	
$= \frac{7}{19} \approx 0,368$	1 pont	
(A feladat szövegéből $P(B) = 0,4$.) $P(A) \cdot P(B) = 0,38 \cdot 0,4 = 0,152$	1 pont	$P(B\mid A) \neq P(B)$, *vagy* $P(A\mid B) \neq P(A)$
Mivel $P(A) \cdot P(B) \neq P(AB)$,	1 pont	
ezért A és B nem független események.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó a sorsjegyek számát önkényesen választva helyesen oldja meg a feladatot, de nem utal arra, hogy ez nem megy az általánosság rovására, akkor ezért 1 pontot veszítsen.
2. Az egy darab kihúzott sorsjegyhez tartozó valószínűségek láthatók a fagráfon.
(Ennek alapján pl. $P(A) = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38$.*)*



9. c)		
Az egy kék sorsjegyre jutó nyeremény várható értéke: $(0{,}4 \cdot 0 +)\ 0{,}35 \cdot 500 + 0{,}2 \cdot 1000 + 0{,}05 \cdot 5000 =$	2 pont	
$= 625$ Ft.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	